СПРАВКА ЗА ПОСТИЖЕНИЯТА
на Михаил Иванов Кръстанов, представени за участие в конкурс за член-кореспондент, обявен от Българска Академия на Науките

Представените статии могат да се групират условно по следния начин:

- ∇ статии, в които се изследва достижимото множество на управляеми системи:

  Статиите, в които се изследва достижимото множество на управляеми системи са с номера [1], [4], [8], [9], [10] , [15], [19], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [49], [50], [54], [58], [60] и [62] от приложения списък с публикации. В тези статии се използват различни подходи, изискващи различни предположения и използване на различни техники.

  В статията [1] е разгледана е нелинейна управляема система, чиято дясна страна е липшицово непрекъсната функция по отношение на фазовите променливи. При естествени предположения е доказано едно ново условие за локална управляемост за малко време от първи ред. Един тримерен нелинеен пример илюстрира приложимостта на полученото резултати за изследване на локалните свойства на достижимото множество на конкретни управляеми системи.

  Случаят на аналитична система (по отношение на фазовите променливи), която е афинна по отношение на едномерно управление, е разгледан в [54]. Получено е ново необходимо условие за локална управляемост за малко време от висок порядък. Това условие не зависи само от алгебрата на Ли, породена от векторните полета на системата, но и от множеството от допустимите стойности на управлението. Показан е пример на полиномиална система, за която това условие е необходимо и достатъчно. Доказателството е тежко и се основава на подходяща нилпотентна апроксимация на алгебрата на Ли и на така нареченото "хронологично смятане създадено от Аграчев и Гамкрелидзе през 1993 г.

  В статията [8] се изучава свойството локална управляемост за малко време в нулата на нелинейна управляема система, чиято е дясна страна е с компоненти, които са хомогенни от втора степен по отношение на фазовите променливи и константи по вектора на управлението. Използвайки формулата на Campbell-Baker-Hausdorff са получени допирателни векторни полета към съответното достижимо множество в нулата. Като следствие от този резултат е получено едно ново достатъчно условие за локална управляемост.

Свойството локална управляемост за малко време е едно от основните свойства, изучавани в теорията на управляемите системи. То е изследвано напълно за случая на линейни системи. За случая на нелинейни системи има голяма празнина между съществуващите необходими и достатъчни условия за управляемост.

Да разгледаме следната нелинейна управляема система:

$$\dot{x}(t) \;=\; f_0(x(t)) \;+\; u(t)\; f_1(x(t)),\; x(0) = x_0, \tag{1}$$

където фазовата променлива x принадлежи на гладкото многообразие M, x_0 е фиксирана точка от M, f_0 и f_1 са гладки векторни полета, като $f_0(x_0) = 0$. Системи от този вид са важни при моделиране на различни динамични процеси.

Допустими управления са измеримите по Лебег функции u, дефинирани в компактен интервал от вида $[0, T]$, $T > 0$, като $u(t) \in [-1, 1]$ за почти всяко t от $[0, T]$. С $\mathcal{U}$ ще означаваме множеството от всички допустими управления. Траектория на (1), дефинирана в $[0, T]$, тръгваща от точката x_0 и съответстваща на допустимото управление u, се нарича всяка абсолютно непрекъсната функция $x(t),\ t \in [0, T]$, удовлетворяваща (1) за почти всяко t от $[0, T]$. Достижимо множество $\mathcal{R}(x_0, T)$ на (1) с начало x_0 в момента $T > 0$ се дефинира като множеството от всички точки, достижими за време T от точката x_0 по траектории на управляемата система (1). Системата (1) се нарича локално управляема за малко време (ЛУМВ) в точката x_0, ако x_0 принадлежи на вътрешността на множеството $\mathcal{R}(x_0, T)$ за всяко $T > 0$.

Свойството локална управляемост за малко време на управляемата система (1) е локално свойство в случая на ограничени управления. Ето защо можем без ограничение на общността да предполагаме, че $x_0 \in R^n$ и векторните полета f_0 и f_1 са дефинирани в компактна околност на точката x_0.

Ще илюстрираме използваните диференциално-геометрични методи като представим основния резултат в статията [39]. Добре известен факт е, че за аналитични системи от вида (1) локалните свойства на достижимото множество се определят от скобките на Ли на векторните полета f_0 и f_1, пресметнати в точката x_0. Тези стойности могат да се изчисляват непосредствено.

Полученият резултат в статията [39] е едно ново достатъчно условие за локална управляемост. Основната идея е следната. Разглеждаме фамилията

$$\mathcal{W} = \{f_0 + \alpha f_1 :\; \alpha \in [-1, 1]\}$$

от гладки векторни полета. Лесно може да се докаже, че алгебрата на Ли, породена от елементите на $\mathcal{W}$, съвпада с алгебрата на Ли $\mathcal{L}(\vec{f})$, породена от векторните полета f_0 и f_1. Интуитивно можем да си мислим за "Ли групата" $\mathcal{G}(\vec{f})$ с алгебра на Ли $\mathcal{L}(\vec{f})$, и да дефинираме "действието" на $\mathcal{G}(\vec{f})$ върху фазовото пространство. Всеки елемент g на $\mathcal{G}(\vec{f})$ е композиция на експоненти от вида $exp\,(t_i\, g_i)$. Резултатът $g \cdot x_0$ от действието на g върху точката x_0 е точка, получена от точката x_0, като се движим по интегрални криви на елементи от множеството $\mathcal{W}$, като се допуска превключване от едно векторно поле на друго, както и движение "назад във времето". Всички крайни произведения на експоненти от вида $exp\,(t_i\, g_i)$, където $t_i > 0$ и $g_i \in \mathcal{W}$ са истински траектории на разглежданата система и образуват полугрупата $\mathcal{S}(\vec{f})$ на $\mathcal{G}(\vec{f})$. Тогава достижимото множество с начало точката x_0

съдържа $\mathcal{S}(\vec{f})\cdot x_0$. Нека с $\mathcal{H}_{x_0}(\vec{f})$ означим изотропната подгрупа на $\mathcal{G}(\vec{f})$ в точката x_0, т. е. $\mathcal{H}_{x_0}(\vec{f}) := \left\{g \in \mathcal{G}(\vec{f}) : \ g\cdot x_0 = x_0\right\}$. Тогава, ако вътрешността на $\mathcal{S}(\vec{f})$ съдържа елемент на $\mathcal{H}_{x_0}(\vec{f})$, то точката x_0 ще бъде вътрешна точка на $\mathcal{S}(\vec{f})\cdot x_0$.

В статията [39] тази идея е реализирана по един формален начин, като се използва абстрактен подход, основан на резултати на Аграчев и Гамкрелидзе (1978) и на Сусман (1983 и 1987). Използването на този подход позволява да преодолеем трудността, предизвикана от факта, че алгебрата на Ли $\mathcal{L}(\vec{f})$ е безкрайномерна в общия случай и $\mathcal{G}(\vec{f})$ не е коректно дефинирана група на Ли. Затова, вместо да използваме $\mathcal{L}(\vec{f})$, ние използваме формално свободната алгебра на Ли $\mathcal{L}(\vec{X})$, породена от елементите X_0 и X_1, както и нейната обвивка – алгебрата на Ли $\widetilde{\mathcal{L}}(\vec{X})$ от формални редове от скобки на Ли на X_0 и X_1. Тогава управленията могат да се вложат в полугрупата $\mathcal{S}(\vec{X})$ на $\widetilde{\mathcal{G}}(\vec{X})$ чрез изображение, което съпоставя на всяко управление един некомутативен ред, който се получава чрез формално решаване на система ОДУ в термините на X_0 и X_1 вместо да се използват дадените векторни полета f_0 и f_1. Тъй като $\widetilde{\mathcal{G}}(\vec{X})$ не е истинска група на Ли, ние използваме нейна нилпотентна апроксимация $\mathcal{G}^N(\vec{X})$, която се получава чрез анулиране на всички скобки на Ли с дължина по-голяма от N, където N е достатъчно голямо естествено число. Сега $\mathcal{G}^N(\vec{X})$ е коректно дефинирана група на Ли. Означаваме с $\mathcal{S}^N(\vec{X})$ нейната съответна полугрупа.

За да получим достатъчно условие за управляемост, използваме факта, че вътрешността на $\mathcal{S}^N(\vec{X})$ съдържа експонента от линейна комбинация на “лоши скобки на Ли”. Тези скобки на Ли съдържат всички възможни пречки за локална управляемост. Ако всяка лоша скобка на Ли може да бъде “неутрализирана” (т. е. всяка лоша скобка на Ли може да бъде изразена като линейна комбинация на скобки на Ли с по-малко “r-тегло” (това понятие е дефинирано в статията), то управляемата система е локално управляема за малко време в точката x_0. Всъщност това е основната идея на доказателството на достатъчното условие за ЛУМВ, доказано от Сусман през 1987 г. За да се “реализира” r-теглото на една скобка на Ли, се използват фамилии от допустими управления, параметризирани чрез тяхната стойност и дължината на интервала, където те са дефинирани.

Както е показано от Кавски през 1988 г., съществуват управляеми системи, които са ЛУМВ, но само след използване на допустими управления с безкрайно много моменти на превключване, т. е. с използване на допустими управления, чийто брой на превключвания клони към безкрайност, когато дължината на дефиниционния им интервал клони към нула. За да обясним този ефект, използваме една идея на Аграчев и Гамкрелидзе от 1993 г. Избираме едно произволно множество Π от скобки на Ли на $\mathcal{L}^N(\vec{X})$, такива че свободната алгебра на Ли, породена от елементите на Π, съдържа всички лоши скобки на Ли. Използвайки факта, че експонента на линейна комбинация Θ от лоши скобки на Ли принадлежи на вътрешността на $\mathcal{S}^N(\vec{X})$, получаваме, че експонента на сумата на Θ и подходяща линейна комбинация от елементи на Π също принадлежи на $\mathcal{S}^N(\vec{X})$. Означаваме с $\mathcal{S}^N_\Pi(\vec{X})$ полугрупата, състояща се от всички крайни композиции на тези експоненти. Тогава $\mathcal{S}^N_\Pi(\vec{X}) \subseteq \mathcal{S}^N(\vec{X})$. В статията [39] се изучава полугрупата $\mathcal{S}^N_\Pi(\vec{X})$ и е доказано, че експонента на линейна комбинация на нови “Π-лоши скобки на Ли” принадлежи на множеството $\mathcal{S}^N_\Pi(\vec{X})$. Ако всяка една от тези Π-лоши скобки на

Ли може да бъде “П-неутрализирана”, т. е. всяка П-лоша скобка на Ли може да бъде изразена като линейна комбинация на скобки на Ли с по-малко “(r, σ)-тегло” (понятието (r, σ)-тегло също е дефинирано в статията), то получаваме множество от “вариации на управлението” към достижимото множество. Интуитивно, ако можем да построим вариации на управлението във всички възможни посоки, то достижимото множество ще съдържа околност на началната точка. Това интуитивно предположение е доказано строго в [39].

В статията [39] е дефиниран конус, породен от вариации на управления с безкрайно много моменти на превключване. Оказва се, че този конус е изпъкнал. Тук трябва да отбележим, че не всички известни в литературата конуси от вариации на управлението са изпъкнали. Например, Бианкини и Кавски показват през 2003 г., че конусът от вариации на управлението, подобни на класическите “иглени” вариации, не е изпъкнал. Естествено е да отбележим, че за да реализираме вариация на управления с безкрайно много моменти на превключване, се използват фамилии от допустими управления, параметризирани чрез тяхната стойност, дължината на интервала, където те са дефинирани и по броя на техните превключвания.

Изследването на локалната достижимост на едно затворено множество S по отношение на траекториите на едно диференциално включване е изключително важна задача, особено когато се изучават динамични системи в условия на неопределеност, т. е. когато някои данни и параметри не могат да се определят точно. Тази задача не може да бъде сведена до задачата за локална управляемост за малко време във всяка точка от S. Причината се крие в това, че локалната достижимост на едно затворено множество зависи не само от динамиката на управляемата система, но и от геометрията на разглежданото множество. Ето защо тази задача заслужава отделно изучаване.

Да разгледаме следното диференциално включване:

$$\dot{x}(t) \;\in\; F(x(t)), \tag{2}$$

където $F : R^n \rightrightarrows R^n$ е многозначно изображение. Върху това изображение не налагаме никакви условия за непрекъснатост, тъй като използваме подход, основан на подходящо дефинирани вариации на управлението. Различни примери на конкретни управляеми системи са разгледани статиите [49] и [50].

Нека S е затворено подмножество на R^n. Казваме, че S е достижимо за малко време по отношение на диференциалното включване (2), ако за всяко $T > 0$ съществува околност Ω на S, така че за всяка точка $x \in \Omega$ съществува допустима траектория на (2) с начална точка x и достигаща множеството S за време не по-голямо от T, т. е. $\mathcal{R}(x, t) \cap S \neq \emptyset$ за някое $t \in [0, T]$.

Едно от най-често използваните достатъчни условия за локална достижимост на затворено множество е така нареченото условие на Петров (1976). Грубо казано, това условие изисква във всяка точка от околност на множеството S да съществува допустима скорост, “насочена” към множеството. За да формулираме това условие строго, ще използваме следните означения: Нека S е затворено и ограничено подмножество на R^n. Полагаме

$$S_r \;:=\; \{y \in R^n : \; \mathrm{d}_S(y, S) \;\leq r\}, \;\; \text{където} \;\; \mathrm{d}_S(y) \;:=\; \inf\,\{\|y - s\| : \; s \in S\}.$$

Ако x е произволна точка от $S_r \setminus S$, означаваме с

$$\Pi(x) \ := \ \{y \in S : \ \|y - x\| = \mathrm{d}_S(x)\}$$

множеството от всички метрични проекции на точката x върху множеството S.

Нека y принадлежи на границата ∂S на множеството S. Векторът $\xi \in R^n$ се нарича проксимална нормала към S в y, ако съществува $r > 0$, така че точката y е най-близката точка от S до $y + r\xi$. Множеството от всички проксимални нормали в точката y е конус, който ще означаваме с $N_S^p(y)$. При тези означения можем да формулираме достатъчното условие, доказано от Вельов (1994), и Кларк и Воленски (1996) по следния начин:

Нека S е непразно компактно подмножество на R^n, $F : R^n \Rightarrow R^n$ е непрекъснато многозначно изображение с модул на непрекъснатост ω, чиито стойности са изпъкнали компактни подмножества на R^n. Нека съществува $\delta > 0$, така че за всяко $y \in S$ и всяко $\xi \in N_S^p(y)$ съществува $v \in F(y)$ за което

$$\langle \xi, v \rangle \ \leq \ -\delta \|\xi\|. \tag{3}$$

Тогава се твърди, че S е локално достижимо за малко време по отношение на диференциалното включване (2).

Условието (3) е твърде силно. Както е показано в статия на Вельов (1997), това условие е еквивалентно на липшицова непрекъснатост на функцията-време за достигане до границата на множеството S. Освен това, ако неравенството (3) е нарушено в граничната точка y на S (например, когато всички допустими скорости са "допирателни" към множеството S в точката y), ние не можем да приложим горния резултат.

В статията [37] са дефинирани вариации на управлението от висок ред и са представени някои техни свойства. Използвайки тези вариации, е изследвана локалната достижимост на едно затворено множество S по отношението на траекториите на едно диференциално включване. Доказано е достатъчно условие за локална достижимост, което обобщава резултат на Маригонда (2006) в две направления: 1) не се налагат никакви условия за регулярност върху множеството S; 2) доказано е условие от типа на условието на Петров от висок ред.

В статиите [4], [9], [10], [15] и [26] се изследва задачи на оптималното управление и тяхната чувствителност по отношение на грешки от измерванията, както и по отношение на промени на стойностите на различни параметри. Използваният подход използва различни съвременни понятия и методи от негладкия вариационен анализ. За илюстрация ще разгледаме статията [4]. В нея е разгледана непрекъсната задача за оптимално управление на система с нелинейна динамика, интегрална целева функция, ограничения върху управлението и променящ се във времето параметър, който представлява смущения или несигурност. Тази задача е дискретизирана. След това е решена с помощта на метода model predictive control (МПЦ метод). Полученото оптимално управление за дискретната задача е прилага към непрекъснатата система само в първия интервал на дискретизация, измерва се състоянието на непрекъснатата система (при което се допуска известна грешка) и отново се решава дискретната апроксимация с помощта на

МПЦ метода. Тази процедура се повтаря във всички следващи дискретни интервали. В тази статия е получена оценка на грешката в зависимост от стъпката на дискретизация, като са отчетени и грешките от измерването. Числени примери илюстрират получените резултати.

Накрая ще отбележим и резултата, получен в [19]. Това е едно ново необходимо условие за оптималност от типа на принципа на максимума на Понтрягин за дискретна управляема система, разгледана на безкраен времеви интервал. Трябва да подчертае, че това е първото необходимо условие за оптималност, при което спрегнатата променлива е дефинирана явно. Основната идея на този резултат е заимствана от подобен резултат на Асеев и Вельов, получен за непрекъснати управляеми системи през 2014 г.

∇ статии, в които се изследват модели на биотехнологически процеси:

Статиите, в които се изследват модели на биотехнологически процеси са с номера [2], [11] , [12], [13], [16] , [18], [20], [23], [24] , [28], [30], [33], [36] , [38], [43] и [48] от приложения списък с публикации. Задачата за стабилизируемост на математически модели на биопроцеси е важна от гледна точка на практиката във връзка с оптималното използване на различни биореактори. За нейното изучаване се използва богат апарат от математически средства. Особено важно е използването на техники от математическата теория на управлението като например слаба и силна инвариантност по отношение на траекториите на управляеми системи, теорията на асимптотичната стабилизируемост и управляемост на нелинейни управляеми системи и др.

Статията [2] е посветена на изследване на двумерен (базов) модел на биореактор за анаеробно биологично разлагане на органични отпадъци, свързано с добив на биогаз (метан)

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= u(s_{in} - s) - k_1 \mu x \\
\frac{dx}{dt} &= (\mu - \alpha u)x \\
Q &= k_2 \mu x,
\end{aligned}$$

където фазовите променливи s и x означават съответно концентрация на субстрат и биомаса, s_{in} е концентрация на входния субстрат, Q е скорост на добиване на биогаз, $\mu = \mu(s)$ е специфична скорост на растеж на биомасата, k_1 и k_2 са коефициенти, а u е скорост на разреждане в биореактора и е управляем вход. Моделът е изследван при най-общи предположения за функцията $\mu(s)$ и останалите параметри, приемайки, че те не са известни точно, а се знаят само граници (интервали), в които варират. Предложена е частично постоянна обратна връзка (англ. piecewise constant feedback) за глобална стабилизируемост на решенията към предварително избрана оперативна (работна) точка. Изборът на тази точка зависи от известните екологични норми за замърсеност на средата. Приложен е алгоритъм за търсене на екстремум с цел максимизиране на добива на метан. Представени са числови експерименти като илюстрация на теоретичните изследвания. Проведените компютърни симулации потвърждават теоретичните резултати.

В статиите [31], [32] и [38] е изследван друг основен (базов) четиримерен модел на биореактор за анаеробно разлагане на органични отпадъци и добив на биогаз:

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= u(s_1^i - s_1) - k_1\mu_1 x_1\\
\frac{dx_1}{dt} &= (\mu_1 - \alpha u)x_1\\
\frac{ds_2}{dt} &= u(s_2^i - s_2) + k_2\mu_1 x_1 - k_3\mu_2 x_2\\
\frac{dx_2}{dt} &= (\mu_2 - \alpha u)x_2\\
Q &= k_4\mu_2 x_2;
\end{aligned}$$

тук s_1^i, s_2^i са входни концентрации на два вида субстрати, s_1, s_2 са концентрации на субстратите, x_1, x_2 са концентрации на биомаса, Q е скорост на извеждане на биогаз, $\mu_1 = \mu_1(s_1)$ и $\mu_2 = \mu_2(s_2)$ са специфични скорости на растеж на биомасата, k_i, $i = 1, \ldots, 4$, са коефициенти и u е скорост на разреждане в биореактора, която е управляваща променлива.

Този модел описва двуфазен процес, като първите две уравнения представят т. нар. асидогенна фаза, а вторите две – метаногенната фаза. На практика първата фаза (ацидогенезата) е много по-бърза от втората; нещо повече, метаногенезата може да бъде инхибирана, което е определящо за целия процес.

Изследвана устойчивостта на равновесните (стационарните) точки на модела в зависимост от параметъра u. Показано е, че съществуват шест равновесия, които при изменение на u водят до появата на осем бифуркации. Това сложно поведение показва, че управлението на процеса с постоянна скорост u е практически невъзможно. Единственият изход е да се построи обратна връзка, която зависи от състоянията на системата в предходен момент. Нещо повече, на практика се оказва много важно обратната връзка да зависи от измерими в реално време променливи. В статията този въпрос е решен, като е предположено, че първата фаза на процеса вече е стабилизирана и е предложена обратна връзка, която стабилизира втората фаза към предварително избрана (биологически обоснована) работна точка. Доказателството се базира на построяване на явна функция на Ляпунов. Използвайки факта, че работната точка може да се избира произволно, е приложен алгоритъм за търсене на екстремум (extremum seeking algorithm), който стабилизира системата в точката на максимален добив на биогаз. Разглежданията са направени за случая, когато параметрите на модела не са известни точно, а се знаят само граници (интервали) за тях. Алгоритъмът е реализиран програмно в СКА *Maple 13* и са проведени компютърни симулации. След задълбочен математически анализ на горния динамичен модел е намерена адаптивна обратна връзка, която стабилизира цялата четиримерна система. Трябва да отбележим, че адаптивната обратна връзка зависи само от измерими в реално време величини. Това силно увеличава възможностите за използване на получените теоретични резултати. Доказателството за глобална стабилизируемост отново се основава на построяване на явни функции на Ляпунов. Алгоритъмът за търсене на екстремум отново стабилизира системата в точка, в която добивът на биогаз е максимален. Направени са компютърни симулации в СКА *Maple 13*, които потвърждават теоретичните резултати. Доказано е и съществуването на статична обратна връзка за асимптотична стабилизация на горния динамичен модел. Тази обратна връзка също зависи само от измерими в реално време величини. Алгоритъмът за търсене на екстремум стабилизира системата в точка, в която добивът на биогаз е максимален. Направени са и компютърни симулации в СКА *Maple 13*, които потвърждават ефективността на предложената обратна връзка.

Доказателствата за стабилизируемост на нелинейни системи се основават на построяване на явни функции на Ляпунов на подходящи подсистеми на разглеждания модел, като се прилага един резултат на Арзие и Ебенбауер от 2010. Този резултат е обобщение на принципа на Ласал за инвариантност и позволява от поведението на подходящи подсистеми на първоначалната система да направим извод за поведението на цялата система. Вече е получено обобщение на този резултат в статията [22] от приложения списък за случая на диференциални включвания.

∇ статии, свързани с теорията на критичните точки.

Статиите, които свързани с теорията на критичните точки, са с номера [51], [52], [53], [55], [56], [57], [59] и [61] от приложения списък с публикации. В тази връзка ще представя два основни резултата:

През 1995 г. Мартин Шехтер предлага нови идеи, свързани с вариационните методи, известни под името като "планински проход". Постановката на задачата е следната: Дадени са функционал $f : X \to R$, където X е метрично пространство, бариера $B \subset X$, граница $A \subset X$ и множество от пътеки $\Gamma \subset 2^X$, които имат следните свойства:
а) $\gamma \supset A$ за всяко $\gamma \in \Gamma$;
б) $\gamma \cap B \neq \emptyset$ за всяко $\gamma \in \Gamma$;
в) за всяко $\gamma \in \Gamma$, за всяко $t \geq 0$ и за всяко η от

$$\Xi := \{\theta \in C(X \times [0,1], X : \theta(x,t) = x \text{ за всяко } x \in (X \times \{0\}) \cup (A \times [0,1])\}$$

е в сила, че $\eta(\gamma, t) \in \Gamma$.

В класическия "планински проход" функционалът f е C^1 и е "висок"върху бариерата и "нисък" върху границата A. При резултата на Шехтер това не е изпълнено - бариерата е разделена на две части: "висока" част, където функционалните стойности са по-големи или равни на неговите стойности на границата и "ниска" част, където това не е така. Независимо от това, абстрактният резултат на Шехтер предполага съществуване на точка с произволно фиксиран малък наклон, ако "ниската" част на преградата е достатъчно далеч от границата. Това е важно за приложението на абстрактния резултат за доказване на съществуване на решение на нелинейни елиптични частни диференциални уравнения. Използвайки идея на Йоффе и Шварцман от 1996 г., в статиите [53] и [59] е получено обобщение на резултата на Мартин Шехтер. В това обобщение няма никакво предположение за гладкост или дори непрекъснатост на функционала f. Доказателството се основава на подходяща нова версия на класическата "деформационна лема". Този резултат е първото твърдение от тип на "планинския проход" за прекъснати функционали.

Нещо повече, в статията [51] е получен резултат от тип на "планинския проход" за многозначни изображения: Да разгледаме следното частно диференциално включване

$$-\triangle u(x) \in F(x, u(x)), x \in \Omega, \ u_{|\partial\Omega} = 0,$$

където Ω е ограничена област в R^n с частично гладка граница, $F(x, \cdot) : R \to R$ е полунепрекъснато отгоре многозначно изображение с компактни и изпъкнали образи и се търси решение $u \in H_0^1(\Omega)$, такова че $\triangle u \in L^q(\Omega)$ за някое q и $-\triangle u(x) \in F(x, u(x)$ за почти всяко $x \in \Omega$. Предполага се, че функциите $\min F : \Omega \times R \to R$ и $\max F : \Omega \times R \to R$ са $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ измерими, където $\mathcal{L}$ е лебеговата σ-алгебра и $\mathcal{B}$ е фамилията от борелевите множества върху R. Последното предположение е, че съществува число $\sigma \in \left[0, \frac{n-2}{n+2}\right]$ и положителни числа a и b, така че

$$|F(x,t)| := \max\{|z| : \ z \in F(x,t)\} \leq a + b|t|^\sigma.$$

Да дефинираме многозначното изображение $J : L^{\sigma+1} \to R$, като съпоставяме на u множеството

$$\int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(x,s) ds \right) dx,$$

където $f(x, s)$ е произволна измерима селекция на $F(x, s)$. Основният резултат, получен в [51], е че критичните точки на функционала

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \ \|grad\ u\|^2 dx - J(u)$$

са решения на частното диференциално включване

$$-\triangle u(x) \in F(x, u(x)), x \in \Omega, \ u_{|\partial\Omega} = 0.$$

∇ Необходими условия за оптималност в безкрайно-мерни пространства

Егоров показа през 1964 г. пример на задача на оптималното управление с безкрайномерно фазово пространство, за който необходимите условия от тип на максимума на Понтрягин не са изпълнени. Този пример показа, че са необходими допълнителни предположения, които да осигурят валидността на обичайните необходими условия за оптималност.

В статията [34] е разгледана безкрайно-мерна задача на оптималното управление при наличие на терминални ограничения в произволно банахово пространство. След внимателен анализ на използваната вариационна техника за доказване на необходими условия за оптималност, предположението за диференцируемост на нормата във фазовото пространство (типично при подобни доказателства) е отслабено с предположения за отделимост. Показано е, че условието за крайна коразмерност на множеството от вариации във фазовото пространство (това условие също е типично в съществуващата научна литература) не е необходимо. Вместо него е достатъчно това множеството от вариации във фазовото пространство да има непразна вътрешност в затворената му афинна обвивка. Основният резултат в тази статия е едно ново необходимо условие за оптималност (от тип на принципа на максимума на Понтрягин). Като приложение на получения абстрактен резултат е разгледана задача на оптималното управление за случая на възрастово структурирана система при наличие на поточкови терминални ограничения.

Тези изследвания са продължени в [21], където е направен опит за систематизация на различните типове вариации на управлението, разглеждани в литературата. Тази статия показва важността на "равномерността" на апроксимацията на достижимото множество чрез дадено множество от вариации на управлението. А това по един естествен начин води до абстрактната дефиниция на "равномерно множество".

В статията [17] е разгледана абстрактната задача за неотделимост на две затворени множества. Дефинирани са за две нови понятия за апроксимиращи конуси. Основният резултат е абстрактна теорема на множителите на Лагранж. Тази статия показа важността на понятието трансверзалност на две затворени множества и откри широко поле за нови изследвания.

В статията [2] е въведено понятието за тангенциална трансверзалност на две затворени подмножества от банахово пространство. Това е междинно свойство между свойствата трансверзалност и субтрансверсалност. Използвайки го, получаваме множество от известни резултати, както и някои нови резултати по унифициран начин. Доказано е и правило за множителите на Лагранж в абстрактна форма. В доказателствата се изследват тангенциални условия в банаховите пространства вместо в техните дуални пространства и не се използват вариационни принципи. Статията [3] е продължение на статията [2]. В нея е въведено понятието за силна тангенциална трансверзалност на две затворени подмножества от банахово пространство. Това е естествено свойство, от което следва свойството трансверзалност.

Естествено продължение на получените абстрактни резултати е те да се приложат към задача на оптималното управление в крайномерно фазово пространство, но разглеждана като оптимизационна задача в безкрайномерното пространство от съответните траектории. Първият получен вече резултат е уравнение на Ойлер за основната задача на вариационното смятане, който е публикуван в статията [14] от приложения списък.

София, 16.06.2021 г.

/професор дмн Михаил Иванов Кръстанов/