

АВТОРСКА СПРАВКА

на чл.-кор. проф. дмн Олег Кръстев Мушкаров

Представените публикации могат да се разделят на две групи:

I. Научни статии

II. Научно-методически книги и статии

Научните статии съдържат резултати в следните тематични направления:

1. Анализ и геометрия върху почти комплексни многообразия.
2. Геометрия на туисторните пространства.
3. Геометрия на Ермитовите повърхнини.
4. Геометрия на неутрални метрики в размерност 4.
5. Хармонични почти Ермитови структури

Научно-методическите книги и статии са посветени на въпроси и теми от извънкласната работа по математика с ученици, студенти, учители и университетски преподаватели.

Използваната по-долу номерация следва тази от списъка на публикациите, а в скоби с латински букви се цитират статии от литературата в края на справката.

Анализ и геометрия върху почти комплексни многообразия

Резултатите в това направление са включени в статиите [3, 10, 11, 14, 43, 45, 47, 48, 52-67].

Основен обект на изследване в този цикъл от работи са почти комплексните многообразия (п.к. многообразия), които са въведени от Ересман и Хопф в края на 40-те години на миналия век във връзка с решаването на въпроса кога едно гладко многообразие допуска комплексна структура. По-късно техните аналитични, геометрични и топологични свойства са изследвани от редица известни математици като Кодаира и Спенсер [Sp], [KS], Чърн [Cn], Калаби [Ca], Херман[He] , Нюландер и Ниренберг [NN], Громов [Gro], Грей [Gr5] и др. През последните 30 години интересът към п.к. многообразията беше допълнително стимулиран, тъй

като се оказа, че те лежат в основата на редица нови теории с важни приложения в математиката и математическата физика – туисторната теория, теорията на псевдохоломорфните криви на Громов [Gro], теорията на инвариантите на Громов-Уитън, теорията на обобщените комплексни структури на Хитчин [Hi2] и др. Основната цел на горните работи е изследването на п.к. многообразията от гледище на многомерния комплексен анализ и диференциалната геометрия. Най-важните приноси са следните:

- получените обобщения на класическите теореми за холоморфни функции в случая на п.к. многообразия (теоремата на Вайерщрас за равномерната сходимост, принципите за максимум и единственост и др.) и разработените нови конструкции на п.к. многообразия, притежаващи богати семейства от холоморфни функции и п.к. подмногообразия [54, 56-58, 62].
- получените диференциално-геометрични условия за локално съществуване на неконстантни холоморфни функции върху п.к. многообразия [58, 60-62, 66]. Те уточняват и обобщават известната теорема на Нюландер-Ниренберг [NN] за интегрируемост на п.к. структури и резултатите на Калаби [Ca] и Херман [He] за несъществуване на неконстантни локални холоморфни функции върху хиперповърхнини на \mathbb{R}^7 и изотропно неприводими хомогенни п.к. многообразия. С тяхна помощ е доказано, че редица важни класове от п.к. многообразия имат постоянен холоморфен тип, което ги прави интересни обекти за многомерния комплексен анализ.
- получените оценки за размерностите на комплексните подмногообразия на широки класове от п.к. многообразия [55, 59]. Те обобщават и уточняват известни резултати на Грей [Gr2] за 6-мерната сфера и на Кириченко [Ki] за приблизително Келерови многообразия и са в рязък контраст с резултатите на Доналдсън [Do2] за симплектични многообразия.
- развитата ефективна алгебрична техника за изучаване на хомогенни п.к. многообразия и групи на Ли от гледище на многомерния комплексен анализ и почти Ермитовата геометрия [10, 14, 43, 45, 48, 52, 53].

Геометрия на туисторните пространства

Резултатите в това направление са включени в статиите [1, 2, 5, 15-17, 24, 26, 27, 33, 38-40, 42, 44, 46, 47, 49, 51].

Целите на тези изследвания са изучаването на връзката между почти Ермитовата геометрия на туисторните пространства и Римановата геометрия на 4-мерните ориентирани Риманови многообразия, използването на туисторни методи за изследване на въпроса за съществуване и единственост на ортогонални комплексни структури върху Риманови симетрични пространства и построяването на туисторни примери на обобщени комплексни и Келерови структури в смисъл на Хитчин [Hi2].

Туисторната теория възниква през 70-те години в математическата физика във връзка с изследването на уравненията на Янг-Милс. Систематичното и прилагане започва след работите на Пенроуз [Pe1], [Pe2], чиято туисторна програма мотивира Атя, Хитчин и Зингер [AHS] да развият туисторната теория за 4-мерни ориентирани Риманови многообразия. С помощта на туисторния подход бяха получени важни резултати свързани с конструирането на автодуални и антиавтодуални метрики (Доналдсън-Фридман [DF], Таубс [Ta], Лъо Брун [LeB2] и др.), класифицирането на различни видове автодуални многообразия (Фридрих-Курке [FK], Хитчин [Hi1], Понтекорво [Pon] и др.) и кватернионно Келерови многообразия (Саламон [Sa1] и др.), конструиране и класифициране на хармонични изображения (Ийлс-Саламон [ES], Бърстал-Ронсли [BR] и много други).

Туисторното пространство на едно 4-мерно ориентирано Риманово многообразие е S^2 -разслоението, чиито слоеве се състоят от линейните комплексни структури върху допирателните пространства на многообразието, които са съвместими с метриката и обратната ориентация. Полученото 6-мерно многообразие притежава две естествени почти-комплексни структури, които са въведени от Атя-Хитчин-Зингер [AHS] и Ийлс-Саламон [ES] и естествена 1-параметрична фамилия от Риманови метрики, които са съвместими с тях. Възникващите почти Ермитови структури са използвани за първи път от Хитчин [Hi1] и Фридрих-Курке [FK] за класифициране на Айнщайновите автодуални многообразия с положителна скаларна кривина. Техните диференциално-геометрични свойства са изследвани от редица геометри - Фридрих-Грюневалд [FG], Йенсен-Риголи [JR], дьо Бартоломеис [DB] и др. Основните приноси в това направление са следните:

- напълно е решен въпросът за локално и глобално съществуване на холоморфни функции върху туисторни пространства [47]. Получените резултати са обобщение на известните теореми на Атя-Хитчин-Зингер [AHS] и Ийлс-Саламон [ES] за интегрируемост на съответните п.к. структури и на Хитчин [Hi1] за несъществуване на глобални холоморфни форми върху туисторните пространства на компактни автодуални многообразия. Тези резултати са обобщени за съвместимите п.к. комплексни структури в смисъл на Дешам [DE], дефинирани от морфизми на туисторното разслоение [1].
- определени са класовете на Грей-Хервела [GH] на почти комплексните структури на Атя-Хитчин-Зингер [AHS] и Ийлс-Саламон [ES], а така също и на редица класове от съвместими п.к. структури, дефинирани от естествени морфизми на туисторното разслоение. Получени са глобални формули за Римановата кривина, кривината на Ричи, формите на Чърн и различни холоморфни и бисекционни холоморфни кривини на туисторните пространства [5, 15-17, 26, 33, 38, 44, 46, 49, 51]. Получените резултати систематизират и обобщават известни резултати на Майкелсън [Mi], Фридрих-Курке [FK], Ийлс-Саламон [ES], Йенсен-Риголи [JR], Фридрих-Грюневалд [FG], Дешам [DE] и др. и дават естествен подход за класифициране на компактни Айнщайнови автодуални многообразия с отрицателна скаларна кривина с методи на симплектичната геометрия. Построените туисторни примери дават отрицателни отговори на известни въпроси на Грей [Gr7] и Блеър-Януш [BI]. Резултатите върху кривинните свойства на свързаностите на Чърн на туисторните пространства потвърждават съществуването на класовете от почти-Келерови многообразия, изследвани в скорошни работи на Доналдсън [Do2], Льобрун [LeB4] и Апостолов-Драгичи [LeB4]. В частност те показват, че в размерности по-големи от 4 класифицирането на компактни симплектични многообразия даже при силни геометрични и топологични условия е изключително трудна задача.
- доказана е известна хипотеза на Бърстал и Ронсли [BR] за съществуване на ортогонални комплексни структури върху Риманови симетрични пространства [42]. Като следствие са получени широки обобщения на резултатите на Льобрун [LeB1] за 6-мерната сфера и

на Бърнс - дьо Бартоломеис [BV] за комплексните Грасманови многообразия. Като приложение е получено съществено прецизиране на известната теорема на Бърстал-Бърнс-дьо Бартоломеис-Ронсли [BBBR] за холоморфност на стабилни хармонични имерсии. В [39] е доказано, че всяка почти комплексна структура върху 6-мерната сфера, която е близка до стандартната е неинтегруема. Този резултат потвърждава доста силно прочутата хипотеза, че 6-мерната сфера не допуска комплексни структури.

- въведени са туисторните пространства на обобщените п.к. структури в смисъл на Хитчин [Hi2] и са намерени геометричните условия за интегруемост и обобщена келеровост на техните естествени обобщени п.к. структури [24, 27].

Геометрия на Ермитовите повърхнини

Резултатите в това направление са включени в статиите [34-37, 41].

Главната цел на тези изследвания е получаването на класификационни резултати за компактни комплексни повърхнини (2-мерни комплексни многообразия), допускащи Ермитови метрики със специални кривинни свойства. Интересът към тази тематика е породен от факта, че комплексните повърхнини притежават свойства близки до тези на Келеровите многообразия и редица геометрични въпроси могат да се третират успешно и в некелеровия случай чрез комбиниране на диференциално-геометрични и алгебро-геометрични методи. В основата на този подход лежи дълбокият факт, че редица топологични инварианти могат да се изразят като интеграли от различни компоненти на тензора на кривината, а необходимата топологична информация се осигурява от класификацията на Кодаира на компактните комплексни повърхнини. Основните приноси в това направление са следните:

- получена е пълна класификация на компактните автодуални Ермитови повърхнини [37]. С това се завършват изследванията на редица автори – Чен [Ch], Бургиньон [Bu], Бойер [By1], Понтекорво [Pon] и др., направени при различни топологични и геометрични ограничения. Важно приложение е класифицирането на компактните Ермитови повърхнини с точково-постоянна холоморфна

секционна кривина относно Римановата или Ермитовата свързаност. Последните резултати обобщават и уточняват аналогични изследвания на Бойер [By1], Сато-Секигава [SS], Секигава-Кода [SK], Балаш-Годюшон [BG] и др.

- доказано е, че всяка некелерова Айнщайнова Ермитова метрика е конформна на екстремална келерова метрика (в смисъл на Калаби) върху повърхнина с положителен първи клас на Чърн [41]. Този резултат играе ключова роля в завършената наскоро от Ле Брун [LeB3] класификация на компактните Айнщайнови Ермитови повърхнини
- получена е пълна класификация на компактните *-Айнщайнови Ермитови повърхнини с постоянна скаларна и *-скаларна кривина [35]. С нейна помощ са класифицирани обобщените повърхнини на Хопф с неотрицателна скаларна кривина и е показано, че съществуват критични точки на функционала на Хилберт върху пространството от Ермитовите метрики, които не са Айнщайнови метрики.
- получена е класификация на компактните Ермитови повърхнини с Ермитов тензор на Ричи и константна разлика на скаларната и конформната скаларна кривина [34]. Даден е частичен отговор на известен въпрос на Апостолов-Gauduchon [AG] за съществуване на такива повърхнини с нечетно първо число на Бети.

Геометрия на неутрални метрики в размерност 4

Резултатите в това направление са включени в статиите [18-23, 25, 29, 30].

Силен импулс за засилване на интереса към геометрията в сигнатура $(2, 2)$ беше даден от физиците Огури и Вафа [OV], които показаха, че такива метрики и съответни геометрични структури се появяват естествено в теория на струната. Нещо повече, благодарение на работите на редица физици и математици стана ясно, че мощни техники от теориите на Зайберг-Уитън и интегрируемите системи могат успешно да се използват за изследване на Келер-Айнщайнови и автодуални метрики, а също и на автодуалните уравнения на Янг-Милс в неутралната сигнатура.

Целите на изследванията в това направление са разработването на туисторна теория в неутралния случай, изследване на възникващите хиперболични туисторни пространства от гледище на почти Ермитовата геометрия и многомерния комплексен анализ и получаване на класификационни резултати за компактни комплексни повърхнини, допускащи геометрични структури асоциирани с алгебрата на пара-кватернионите. Основните приноси в това направление са следните:

- въведени са хиперболичните туистори пространства, чиито слоеве са двулистни хиперболоиди и е показано, че те притежават две естествени п.к. структури, които са аналози на п.к. структурите на Атя-Хитчин-Зингер [AHS] и Иилс-Саламон [ES] в класическия случай [29, 30]. Доказано е, че редица диференциално-геометрични свойства на класическите туисторни пространства се запазват, но са отбелязани и някои съществени разлики. Най-интересната от тях е, че хиперболичните туисторни пространства на неутрални метрики въведени за първи път от Питин [Pt] са Щайнови многообразия. Това е в драстична разлика с класическия случай, когато не съществуват глобални неконстантни холоморфни функции. Освен това са построени туисторни примери на изотропно-Келерови многообразия, с което се отговаря на въпрос на Гарсия-Рио и Мадушита [GM] от 2000г.
- получена е пълна кривинна информация за метриките на Уокър [Wal] и е показано, че редица важни локални резултати, свързани с известната хипотеза на Голдберг [Go] в положителния случай не са в сила за неутрални метрики [22, 23, 25]. Нещо повече, показано е, че в неутралния случай хипотезата на Голдберг не е вярна даже при много по-силни кривинни условия от Айнщайновост.
- открита е тясна връзка между псевдо-биермитовите структури и обобщената Келерова геометрия в смисъл на Хитчин [Hi2] и холоморфните Поасоновите структури. Последният резултат се използва за класифициране на компактните комплексни повърхнини, допускащи псевдо-биермитови структури [19].
- построени са първите примери на компактни пара-хиперкомплексни повърхнини, недопускащи съвместими неутрални метрики и са намерени топологичните условия за тяхното съществуване [20].

- получените класификационни резултати за компактните пара-хипер-комплексни, пара-хиперермитови и пара-хиперкелерови повърхнини [18] и построените безкрайномерни фамилии от такива структури върху компактни повърхнини, което е в рязък контраст с дефинитния случай.

Хармонични почти Ермитови структури

Резултатите в това направление са включени в статиите [4, 6, 7, 9, 12, 32].

Един от централните въпроси в съвременната диференциална геометрия е намирането на "най-добрите" геометрични обекти върху гладко многообразие. През 1993 г. Калаби и Глук [CG] поставят този въпрос за ортогонални почти комплексни структури върху Риманово многообразие и предлагат като оптимални тези, които разглеждани като сечения на туисторното разслоение имат образ с минимален обем. Те доказват, че стандартната почти комплексна структура върху 6-мерната сфера, дефинирана с помощта на числата на Кели се характеризира с това свойство. Впоследствие автори като К. Ууд [Woo2], Бор-Ернандес-Ламонеда-Салвай [BHS], Лубо [LB] и др. подхождат към този въпрос от гледна точка на теорията на хармоничните изображения. Използвайки туисторната теория и вариационния анализ те изучават ортогоналните почти комплексни структури, които са хармонични сечения на туисторното разслоение.

Най-важните резултати в това направление са следните:

- получените експлицитни формули за втората фундаментална форма на съвместима почти комплексна структура върху Риманово многообразие, разглеждана като изображение от многообразието в неговото туисторно пространство. Класификационните резултати за хармоничност на почти-комплексните структури на Атя-Хитчин-Зингер [AHS] и Иилс-Саламон [ES] върху туисторното пространство на ориентирано 4-мерно Риманово многообразие, намерените геометрични условия за тяхната стабилност и построените туисторни примери, за които те са минимума на функционала на енергията при вариации по сечения на туисторното разслоение [7, 32].
- намерените аналитичните условия за хармоничност на собствените почти комплексни структури върху многообразия на Уокър [Wal],

разгледани като изображения (сечения) на съответните хиперболични туисторни пространства (разслоения) [9, 12]

- намерените геометричните условия върху 4-мерно почти Ермитово многообразие, при които почти комплексната структура е хармонично изображение или минимална изометрична имерсия от многообразието в неговото туисторно пространство. Тяхната спецификация за Ермитови и почти Келерови многообразия и построените примери върху 4-мерни групи на Ли и повърхнини на Иное [6].

Монографии и книги

Монографията [1] е продължение на [6] и в нея са представени мощни алгебрични, аналитични и геометрични методи за решаване на екстремални геометрични задачи и доказване на различни по характер геометрични неравенства. Започвайки с основите като неравенството на триъгълника и неговото обобщение за начупени линии в нея последователно се излагат важни общи подходи и техники, използващи метода на усредняване, скалярно произведение и комплексни числа, квадратични форми, крайни трансформации на Фурие, линии на ниво и принцип на допирането, неравенствата на Ердьош-Мордел и Брун-Минковски, изопериметричната теорема и др. Изложената теория е илюстрирана с много конкретни примери и задачи за упражнения, които помагат на читателя не само да овладее теоретичния материал, но и му дават интересни възможности за самостоятелни изследвания.

Монографията [2] е увод във фундаменталните теоретични идеи на теорията на числата, които са илюстрирани с многобройни интересни и нетривиални примери. Първите четири глави са посветени на базисни теми като делимост, сравнения, различни видове диофантови уравнения, фундаменталната теорема на аритметиката, основни аритметични функции, класическите сравнения на Ферма, Ойлер, Лагранж и Лукас, квадратични осатъци и различни сравнения за биномни коефициенти. В петата глава е разработен апарата на така наречените p -адични оценки, които дават възможност по напълно елементарен начин да се получават красиви и неочаквани теоретико-числови факти. Най-важните резултати в тази глава са теоремата на Лъожандър и разработената аритметика на биномните коефициенти и с тяхна помощ са доказани силни резултати за разпределение на простите числа. В последната шеста глава се

разглеждат сравнения по модули съставни числа, китайската теорема за остатъците, теоремата на Ойлер и техни приложения за примитивни корени. Накрая ще отбележим, че уводът на книгата е написан от известния специалист в теория на числата Преда Михайлеску от Математическия институт на Гьотингенския университет.

Монографията [3] е систематично изложение на теорията на функционалните уравнения. В нея се разглеждат основните методи и техники за решаване на такива уравнения без използване на диференциално смятане. Книгата съдържа всички важни функционални уравнения давани на национални и международни олимпиади и състезания през последните години, като те са класифицирани според метода за тяхното решаване. За интереса към нея говори фактът, че през 2020 г. тя е преиздадена за трети път.

Монографията [4] е значително разширен вариант на книгата [20]. Целта и е да запознае читателите с някои основни методи за решаване на екстремални геометрични задачи, а така също и с известни класически задачи, довели до създаването на важни математически теории. В първата глава са изложени пет метода за намиране на геометрични екстремуми, използващи геометрични трансформации, алгебрични неравенства, математически анализ, частично вариране и линии на ниво. Втората глава е посветена на някои избрани типове екстремални геометрични задачи, свързани с класическата изопериметрична задача, екстремални свойства на забележителни точки в триъгълник, задачата на Малфати и екстремални задачи от комбинаторната геометрия. Всеки от параграфите на тези две глави се състои от теоретична част, примери и подходящи задачи за упражнение. В последната глава са представени тематично обединени екстремални геометрични задачи, давани на национални и международни математически олимпиади и състезания.

Четири монографии отразяват опита на авторите в дългогодишната им работа с талантиливи ученици по математика в България, Австрия, САЩ, Румъния и Франция. Те са предназначени не само за ученици с повишен интерес към математиката и тяхната подготовка за участие в състезания и олимпиади, но и за учители и професионални математици-любители на геометрията.

Книгите [5, 9, 10, 13] съдържат дидактически материали за ученици, студенти и учители, разработени в рамките на европейските проекти *Bringing Mathematics to Earth*, *MATH 2EARTH* и *Meeting in Mathematics* по програмата Comenius 2. 1 с партньори от университетите в Пиза, Ви-

ена, Архус, Нитра и Рейкявик. И трите проекта получиха много високи окончателни оценки от Европейската комисия.

В [6] са разгледани някои основни методи за доказване на геометрични неравенства, използващи обобщеното неравенство на триъгълника, алгебрични неравенства, вектори и скалярно произведение, комплексни числа и математически анализ. Подробно са изложени най-важните тригонометрични и метрични неравенства в триъгълник, неравенството на Блъндън и различни неговے приложения. Книгата отразява опита на авторите като лектори на лятната програма AwesomeMath в University of Texas, Dallas, Cornell University, University of California, Santa Cruz, University of California, Berkeley, State University of San Jose и University of Puget Sound, Tacoma, USA.

В останалите книги са събрани задачите (с пълни решения), предлагани на най-важните математически състезания и олимпиади, проведени в България през периода 1997г. - 2011г. (Зимните математически състезания, Пролетния математически турнир, Регионалният и Националният кръг на Националната олимпиада по математика, Математическият турнир "И. Салабашев"), а също и на голяма част от проведените Балкански олимпиади по математика. Те са предназначени за ученици с повишен интерес към математиката и могат да бъдат използвани от учители и преподаватели от ВУЗ и БАН при подготовката на ученици за участие в наши и международни състезания и олимпиади по математика.

Учебни помагала

Учебните помагала съдържат темите и подробни решения на задачите, предлагани на кандидат-студентските изпити по математика за основните университети в България през 1994 г. - 2005 г. В [18] са изложени някои основни типове функционални уравнения и неравенства и различни методи за тяхното решаване. Те са илюстрирани с многобройни примери на задачи от този тип, давани на наши и международни олимпиади и състезания по математика.

Научно-методически и научно-популярни статии

Статията [1] е посветена на известната хипотеза на Сендов за разположението на критичните точки на полином и онлайн доклада на филдсовия лауреат Т. Тао, изнесен на 26 януари 2021 г. в Международния

център за математически науки-София. В [2] са получени най-добрите полиномиални оценки за симетрични функции от 4-та степен на страните на триъгълник чрез радиусите на вписаната и описаната окръжност. В статиите [3-6] е споделен опита от работата в Ученическия институт по математика и информатика за развиване на изследователския потенциал на ученици с повишен интерес към математиката, информатиката и информационните технологии. В [20] е доказана една хипотеза на Табов за сумата от степените на разстоянията от точка до върховете на правилен n -ъгълник, като се използват тригономитрични полиноми. В [22] и [8] е получена нова информация за известното уравнение на Каталан и задачата на Малфати. В останалите статии са изложени обобщения и вариации на задачи, предлагани на наши и международни състезания и олимпиади по математика и тематично подбрани задачи и техники за тяхното решаване, използвани в лекции на автора при подготовките на националните отбори за участие в Балканските и Международните олимпиади по математика.

В научно-популярните статии е дадена информация за проведени Балкански и Международни олимпиади по математика с аналитични коментари за решенията на предложените задачи и за чествания, конференции, сесии и летни изследователски школи на Ученическия институт. В статията [1] е отразено честването на 20 години от кончината на бележития български математик акад. Л. Илиев.

Литература

- [AHS] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 362** (1978), 425-461.
- [AG] V. Apostolov, P. Gauduchon, The Riemannian Goldberg-Sacks theorem, *Int. J. Math.* **8** (1997), 421-439.
- [AD] V. Apostolov, T. Draghici, The curvature and the integrability of almost-Kähler manifolds: A survey, *Fields Institute Communications*, AMS, **35** (2003), 25-53.
- [BG] A. Balas, P. Gauduchon, Any Hermitian metric of constant non-positive (Hermitian) holomorphic sectional curvature on a compact complex surface is Kähler, *Math. Z.* **190** (1985), 39-43.

- [By1] C. Boyer, Conformal duality and compact complex surfaces, *Math. Ann.* **274** (1986), 517-526.
- [Bu] J. P. Bourguignon, Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein, *Invent. Math.* **63** (1981), 263-286.
- [BI] D. Blair, S. Ianus, Critical associated metrics on symplectic manifolds, Nonlinear Problems in Geometry, *Contemp. Math.* **51** (1986), 23-29.
- [BHS] G. Bor, L. Hernandez-Lamonedá, M. Salvai, Orthogonal almost-complex structures of minimal energy, *Geom. Dedic.* **127**(2007), 75–85.
- [BB] D. Burns, P. De Bartolomeis, Applications Harmoniques Stables dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4^e serie (1988), 159-177.
- [BBBR] F. Burstall, D. Burns, P. De Bartolomeis, J. Rawnsley, Stability of harmonic maps of Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.* **30** (1989), 579-594.
- [BR] F. Burstall, J. Rawnsley, Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces, *Lecture Notes in Math.* **1424**, Springer-Verlag, 1990.
- [Ca] E. Calabi, Constructions and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 407-438.
- [CG] E. Calabi, H. Gluck, What are the best almost-complex structures on the 6-sphere?, *Proc. Sym. Pure Math.* **54** (1993), part 2, 99-106.
- [Ch] B.-Y. Chen, Some topological obstructions to Bochner-Kähler metrics and their applications, *J. Diff. Geom.* **13** (1978), 574-588.
- [Cn] S. Chern, Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. Math.* **47** (1946), 85-121.
- [DB] P. De Bartolomeis, Some New Global Results in Twistor Geometry, Geometry and Complex Variables, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **132** (1991), 155-163.
- [DE] G. Deschamps, Compatible complex structures on twistor spaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), 2219–2248.

- [Do2] S. Donaldson, Symplectic submanifolds and almost complex geometry, *J. Diff. Geom.* **4** (1996), 666-705.
- [DF] S. Donaldson, R. Friedman, Connected Sums of Self-Dual Manifolds and deformations of Singular Spaces, *Nonlinearity* **2** (1989), 197-239.
- [ES] J. Eells, S. Salamon, Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (4) **12** (1985), 589-640.
- [FG] Th. Friedrich, R. Grunewald, On Einstein metrics on the twistor space of a four-dimensional Riemannian manifold, *Math. Nachr.* **123** (1985), 55-60.
- [FK] Th. Friedrich, H. Kurke, Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature, *Math. Nachr.* **106** (1982), 271-299.
- [GM] E. Garcia-Rio and Y. Matsushita, Isotropic Kähler structures on Engel 4-manifolds, *J. Geometry and Physics* **33** (2000), 288-294.
- [Go] S. Goldberg, Integrability of almost Kähler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 96-100.
- [Gr2] A. Gray, Almost complex submanifolds on the six sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 277-279.
- [Gr5] A. Gray, Nearly Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.* **4** (1970), 283-309.
- [Gr7] A. Gray, Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 601-612.
- [GH] A. Gray, L. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. di Math. Pura ed Appl.* **123** (1980), 35-58.
- [Gro] M. Gromov, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82**(1985), 307-347.
- [He] R. Hermann, Compact homogeneous almost complex spaces of positive characteristic, *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** (1956), 471-481.

- [Hi1] N. Hitchin, Kählerian twistor spaces, *Proc. London Math. Soc.* **43** (1981), 133-150.
- [Hi2] N. Hitchin, Instantons, Poisson structures and generalized Kähler geometry, *Comm. Math. Phys.* **265** (2006), 131-164.
- [JR] C. Jensen, M. Rigoli, Twistor and Gauss lifts of surfaces in four-manifolds, Recent developments in geometry, *Contemp. Math.* **101** (1989), 197-232.
- [Ki] V. F. Kirichenko, On almost Hermitian submanifolds of K -spaces, *Problems in geometry* (7) 39-47, VINITI, Moscow, 1975.
- [KS] K. Kodaira, D. C. Spencer, On the Variation of Almost-Complex Structures, Algebraic Geometry, Topology: Symposium in honor of S. Lefschetz. Princeton (N. J): Princeton Univ. Press, 1957, 139-150.
- [LeB1] C. LeBrun, Orthogonal complex structures on S^6 , *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 136-138.
- [LeB2] C. LeBrun, Explicit Self-Dual Metrics on $\mathbf{CP}_2 \# \dots \# \mathbf{CP}_2$, *J. Diff. Geom.* **34** (1991), 223-253.
- [LeB3] C. LeBrun, Einstein Metrics on Complex Surfaces, Geometry and Physics (Aarhus 1995) (Eds. J. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen and A. Swann), *Lect. Notes in Pure Appl. Math.*, Marcel Dekker (1996).
- [LeB4] C. LeBrun, Ricci curvature, minimal volumes, and Seiberg-Witten theory, *Invent. Math.* **145** (2001), 279-316.
- [LB] E. Loubeau, Harmonic geometric structures: the general theory and the cases of almost complex and almost contact structures, *Note di Matematica* **37**(2017), 113-118.
- [Mi] M. Michelson, On the existence of special metrics in complex geometry, *Acta Math.* **149** (1982), 261-295.
- [NN] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates on almost complex manifolds, *Ann. Math.* **65** (1954), 391-404.
- [OV] H. Ooguri, C. Vafa, Self-duality and $N = 2$ string magic, *Modern Phys. Lett. A* **5**, no.18 (1990), 1389-1398.

- [Pt] J. Petean, Indefinite Kähler-Einstein metrics on compact complex surfaces, *Commun. Math. Phys.* **189** (1997), 227-235.
- [Pe1] R. Penrose, Twistor theory, its aims and achievements, Quantum Gravity, An Oxford symposium, Clarendon Press, Oxford, 1975, 268-407.
- [Pe2] R. Penrose, The twistor programme, *Rep. on Math. Phys.* **12** (1977), 65-76.
- [Pon] M. Pontecorvo, Uniformization of conformally flat Hermitian surfaces, *Diff. Geom. and its Appl.* **2** (1992), 295-305.
- [Sa1] S. Salamon, Quaternionic Kähler manifolds, *Invent. Math.* **67** (1982), 143-171.
- [SS] T. Sato, K. Sekigawa, Hermitian surfaces of constant holomorphic sectional curvature, *Math. Z.* **205** (1990), 659-668.
- [SK] K. Sekigawa, T. Koda, Compact Hermitian surfaces of pointwise constant holomorphic sectional curvature, *Glasgow Math. J.* **37** (1995), 343-349.
- [Sp] D. C. Spencer, Potential Theory and almost-complex manifolds, In: Lectures on Functions of a Complex Variable, ed. Wilfred Kaplan et al., The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1955, 15-43.
- [Ta] C. H. Taubes, The existence of anti-self-dual metrics, *J. Diff. Geom.* **36** (1992), 163-253.
- [Wal] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Q. J. Math.* **1** (1950), 69-79.
- [Woo2] C. M. Wood, Harmonic almost complex structures, *Compos. Math.* **99** (1995), 183-212.