

# Кратко описание на най-важните научни постижения на проф. дмн Петър Бойваленков за участие в конкурс за член-кореспондент на БАН, 2021

## 1. Необходими и достатъчни условия за оптималност на границите на Левенщейн.

През 1996 г. в работата [1] (съавторите Даньо Данев и Силвия Бумова по това време бяха студенти във ФМИ, мои дипломанти) е доказана следната теорема.

**Theorem 3.1** *The bound  $L_m(n, s)$  can be improved by a polynomial from  $A_{n,s}$  of degree at least  $m + 1$  if and only if  $Q_j(n, s) < 0$  for some  $j \geq m + 1$ . Moreover, if  $Q_j(n, s) < 0$  for some  $j \geq m + 1$ , then  $L_m(n, s)$  can be improved by a polynomial from  $A_{n,s}$  of degree  $j$ .*

Тази теорема дава необходими и достатъчни условия за глобална оптималност на границите на Левенщейн (вид локална оптималност е известна от 1980 г.). С други думи, теоремата дава необходими и достатъчни условия за съществуването на полиноми, подобряващи съответните граници на Левенщейн. Тези условия са изследвани в същата статия, а метод за конструирането на подходящи полиноми е предложен преди това в [2] (както и дисертацията ми през 1993; вж. също [10]). Теоремата е обобщена през 1998 г. за полиномиални метрични пространства в работата [3].

Важността на Теорема 3.1 беше отбелязана от самия Левенщейн, който включи обобщението за полиномиални метрични пространства в главата [4], която написа за Handbook of Coding Theory, като Теорема 5.47 (с по-кратко, но по-същество нашето доказателство). В книгата [5] Ериксон и Зиновиев включиха теоремата като Теорема 2.6.1 (с доказателството от [1]), а & 2.6 е озаглавен "The Boyvalenkov-Danev-Bumova criterion".

Аналози на Теорема 3.1 за универсални граници за енергии на сферични кодове бяха доказани през 2016 г. в работата [6] (втората част на Теорема 3.1), на кодове в Хемингови пространства в [7] и през 2019 г. за енергии на кодове в полиномиални метрични пространства в работата [8]. Подобен резултат беше доказан и от Кон-де Корси-Айрланд в [9] през 2018 г. Интересна следваща стъпка е предложена от Сардари-Заргар [17] в работа, която засега е само в ArXiv.

Работата [1] има 41 независими цитирания (15 от тях в Скопус).

## 2. Универсални граници за енергии.

В работата [6] е развита техника и е доказана следната универсална долна граница за енергии на сферични кодове.

**Theorem 3.1** *Let  $n, N$  be fixed and  $h(t)$  be an absolute monotone potential. Suppose that  $\tau = \tau(n, N)$  is as in (18), and choose  $k = \lceil \frac{\tau+1}{2} \rceil$ . Associate the quadrature nodes and weights  $\alpha_i$  and  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , as in (21). Then*

$$\mathcal{E}(n, N; h) \geq R_\tau(n, N; h) := N^2 \sum_{i=1}^k \rho_i h(\alpha_i). \quad (1)$$

Moreover, the polynomials defined by (i), respectively by (ii), provide the unique optimal solution of the linear program (11) for the subspace  $\Lambda = \mathcal{P}_\tau$  and consequently,

$$\mathcal{W}(n, N, \mathcal{P}_\tau; h) = R_\tau(n, N; h).$$

Универсалността на границата (1) е в смисъла на Левенщайн [4] и се проявява (допълва) и в някои други аспекти. Всъщност това са безбройно много граници, които се получават по един и същи начин, а възлите на оптималност  $\alpha_i$  и теглата  $\rho_i$  не зависят от потенциала  $h$  (такива, абсолютно монотонни, потенциали има неизбройно много). Нещо повече, границата се достига тогава и само тогава, когато се достига границата на Левенщайн и, в частност, се достига от всички универсално оптимални конфигурации от работата на Кон-Кумар [11] от 2007 г. с изключение на 600-клетката. По този начин горната теорема и свързаните с нея резултати от [6, 8, 13] обединяват разбиранията за универсалност на Левенщайн от 1990-те и на Кон-Кумар [11] от 2007 и някои следващи статии на Кон и съавтори.

В монографията [12] Глава 5 е посветена на границите на линейното програмиране за енергии на сферични кодове и на универсално оптималните сферични кодове, като 5.5 и 5.6 развиват теорията и доказват границата (1) (вж. Теорема 5.6.5).

Техниките от [6] бяха развити и използвани от авторите за получаване на нови универсални граници за кодове с фиксирани диаметър и мощност [13, 15], както и за обобщение на границите на Левенщайн [14, 10, 15].

Работата [6] има 10 независими цитирания (4 от тях в Скопус), а предхождащата я работа [16], където границата (1) е анонсирана, има 6 независими цитирания (5 от тях в Скопус).

## 3. Изследвания на дизайни в полиномиални метрични пространства.

В серия от работи (номера [48,46,42,40-38,36-29,27,12,4] от списъка с работи по конкурса) са разгледани задачи, свързани със структурата на оптимални и близки до оптималните кодове и дизайни в различни пространства. Предложени са [48,46,42,40] и са приложени методи за пресмятане на спектри (разпределение на разстоянията) на такива кодове и дизайни, като резултатите дават важни характеристики [46,42,40,36,35,33,12,4], а в някои случаи и резултати за несъществуване [48,46,42,40-38,34-29,27]. Намерено е [48] симетричното контактно

число  $\tau_5 = 40$  (този резултат от 1993 дори и досега не е повторен от новите методи за полуопределено оптимиране, които достигат само до 42 като горна граница). Доказана е [35] единствеността на 11-дизайна със 120 точки в 4-мерното евклидово пространство (вж. също [36]). Получени са характеристики на нелинейни кодове с две разстояния [12,4], които допълват известните такива за линейни кодове.

За важността на тези резултати свидетелства казаното в книгата Algebraic Combinatorics (Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Tatsuro Ito, Rie Tanaka), De Gruyter 2021: "Besides, there are works of Boyvalenkov [105] and his school to improve the Fisher type lower bound for t-designs ([106, 107, 108, 104, 378])... . As subsequent developments, there are some works by the group of Boyvalenkov [107, 108, 109] ... ".

## Литература

- [1] P. Boyvalenkov, D. Danev, S. Bumova, Upper bounds on the minimum distance of spherical codes, *IEEE Transactions on Information Theory* 42, 1996, 1576-1581.
- [2] P. Boyvalenkov, Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs, *Discrete and Computational Geometry* 14, 1995, 167-183.
- [3] P. Boyvalenkov, D. Danev, On linear programming bounds for codes in polynomial metric spaces, *Problemy Peredachi Informatsii* 34(2), 1998, 16-31 (in Russian); English translation in *Problems of Information Transmission* 34(2), 1998, 108-120.
- [4] V.I. Levenshtein, Universal bounds for codes and designs, *Handbook of Coding Theory*, V. S. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier, Amsterdam, 1998, Ch. 6, 499-648.
- [5] Th. Ericson, V. Zinoviev, *Codes on Euclidean Spheres*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, 2001.
- [6] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Universal lower bounds for potential energy of spherical codes, *Constructive Approximation* 44, 2016, 385-415.
- [7] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Energy bounds for codes and designs in Hamming spaces, *Designs, Codes and Cryptography* 82(1), 2017, 411-433 (arXiv:1510.03406v2).
- [8] P. Boyvalenkov, P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Energy bounds for codes in polynomial metric spaces, *Analysis and Mathematical Physics* 9(2), 2019, 781-808 (arXiv:1804.07462).
- [9] H. Cohn, M. de Courcy-Ireland, The Gaussian core model in high dimensions, *Duke Mathematical Journal* 167, 2018, 2417-2455 (arXiv:1603.09684).

- [10] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Bounds for spherical codes: the Levenshtein framework lifted, *Mathematics of Computation* 90(329), 2021, 1323-1356 (arXiv:1906.03062).
- [11] H. Cohn, A. Kumar, Universally optimal distribution of points on spheres, *J. Amer. Math. Soc.* 20, 2007, 99-148.
- [12] S. V. Borodachov, D. P. Hardin, E. B. Saff. *Discrete Energy on Rectifiable Sets*, Springer Monographs in Mathematics, New York, 2019.
- [13] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Upper bounds for energies of spherical codes with given cardinality and separation, *Designs, Codes and Cryptography*, 88, 2020, 1811-1826 (arXiv:1909.00981).
- [14] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova. On spherical codes with inner products in prescribed interval, *Designs, Codes and Cryptography* 87, 2019, 299-315.
- [15] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Universal bounds for size and energy of codes of given minimum and maximum distances, *IEEE Transactions on Information Theory*, 67 (6, part 1 – dedicated to Vladimir I. Levenshtein), 2021, 3569-3584 (arXiv:1910.07274).
- [16] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova. Universal upper and lower bounds on energy of spherical designs, *Dolomites Res. Notes Approx.* 8, 2015, 51-65.
- [17] N. Sardari, M. Zargar, New upper bounds for spherical codes and packings, arXiv:2001.00185v3.