

# СПРАВКА ЗА ПОСТИЖЕНИЯТА

на Надежда Костадинова Рибарска

Тази справка се отнася за публикации, представени на конкурса за член-кореспондент на Българската академия на науките, обявен на 7.05.2024 г.

Условно тези публикации могат да бъдат разделени на четири групи: геометрия на банаховите пространства, теория на критичните точки, диференциални включвания и необходими условия за оптималност. Номерацията съответства на списъка с всички публикации на кандидата.

## 1 Геометрия на банаховите пространства (21, 25, 27, 33, 35-41)

Тези изследвания са посветени на една част от геометрията на банаховите пространства, която лежи на границата между функционалния анализ, общата топология и оптимизацията. Една от основните идеи в нея е идеята за “фрагментируемост”. J.E.Jaune и C.A.Rogers въвеждат понятието “метрика, фрагментираща дадено топологично пространство” през 1985 година. Да отбележим, че фрагментируемостта и някои близки до нея понятия се появяват естествено в няколко различни ситуации преди 1985 година. Един от най-известните примери в това направление е геометричната характеристика на свойството на Радон-Никодим. Рибарска разглежда това понятие от гледна точка на съществуване на фрагментираща метрика. Топологични пространства, за които съществува фрагментираща метрика, се наричат “фрагментируеми”. В статията 37 е получена вътрешна характеристика на такива пространства, както и редица техни свойства. Доказано е, че ако  $K$  е фрагментируем компактен, то пространството  $(C(K)^*, w^*)$  също е фрагментируемо. Публикацията под номер 35 в списъка съдържа две теореми, отнасящи се до фрагментируемите пространства. В едната от тях е доказано, че ако едно банахово пространство притежава строго изпъкнала еквивалентна норма, полунепрекъснатата отдолу спрямо някаква хаусдорфова слаба топология  $\tau$ , то пространството, надарено с топологията  $\tau$ , е фрагментируемо. Като следствие оттук се получава друго доказателство на факта, че ако спрегнатото на

дадено банахово пространство има строго изпъкнала дуална норма, то пространството е слабо асплундово. Другата теорема в тази публикация твърди, че ако една полунепрекъсната отдолу метрика  $\sigma$ -фрагментира дадено топологично пространство, то пространството е фрагментируемо. Първата от тези теореми е усиlena в публикацията под номер 33 в списъка, като е използван един известен резултат на Preiss. По-точно, доказано е, че ако едно банахово пространство притежава еквивалентна диференцируема по Gâteaux норма, то неговото спрегнато, снабдено със слабата със звезда топология, е фрагментируемо. В публикацията с номер 27 е доказано, че  $\sigma$ -фрагментируемостта (т.е. нормата в дадено банахово пространство  $\sigma$ -фрагментира пространството, надарено със слабата топология) е свойство на трите пространства (three-space property).

Кандидатът прилага методите, разработени за изследване на фрагментируемите пространства, за изследване на близки по дух понятия. В публикацията 36 пространствата на Gruenhage, въведени през 1985г., са характеризирани по подобен начин и е доказано, че ординалният интервал  $[0, \omega_1]$  е фрагментируем, но не принадлежи на този клас. Публикацията под номер 25 в списъка е посветена на свойството “изброимо покритие с множества с малък локален диаметър” (“countable cover by sets of small local diameter”). В първата част на статията е изследвана връзката между топологичните пространства, притежаващи това свойство, и пространствата на Gruenhage. Втората част от тази статия е посветена на едно свойство на стабилност на това свойство, по-точно на доказателството на следната теорема: Нека  $X$  и  $Y$  са хаусдорфови компакти и  $C_p(X)$  има  $p$ -кадецова норма, а  $C_p(Y)$  има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър в нормата. Тогава  $C_p(X \times Y)$  също има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър в нормата. В публикацията с номер 21 в списъка идеите от доказателството на теоремата от втората част на предишната публикация са използвани, за да се получи едно свойство на стабилност на пространствата, притежаващи еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма, като връзката се базира на известната характеристика на Moltó, Orihuela и Троянски на пространствата, притежаващи такава норма. Доказано е, че ако  $K$  е хаусдорфов компакт,  $E$  е банахово пространство и  $C(K)$ ,  $E$  притежават еквивалентна локално изпъкнала норма, то  $C(K, E)$  (пространството от непрекъснатите функции, дефинирани в  $K$  и приемащи стойности в  $E$ ) също притежава еквивалентна локално изпъкнала норма. При това полунепрекъснатостта отдолу на еквивалентната локално изпъкнала норма спрямо подходяща слаба топология може да бъде контролирано в зависимост от съответните свойства на еквивалентните локално изпъкнали норми в  $C(K)$  и  $E$ .

В работите 39-41 част от резултатите, описани досега, са използвани при доказателства, че в доста обща ситуация “почти всички” обекти от тип антагонистични игри или задачи за минимакс имат единствено решение.

## **2 Теория на критичните точки (23, 24, 26, 28-32, 34)**

В тази група статии се изучават негладки варианти на класическата вариационна техника за търсене на критични точки на даден функционал като Лемата за планинския проход (Mountain pass theorem) и теореми от тип Люстерник-Шнирелман. В публикацията 31 това е направено за функционали, дефинирани върху финслерово многообразие, като е използвана нова конструкция на подходяща деформация за задача, където стандартното в повечето публикации в областта прилагане на принципа на Ekeland не дава резултат. Теорията за топологичната степен за смущения на идентитета с локално компактен оператор (F. Browder и R. Nussbaum) е приложена в 29 за получаване на теорема за седловата точка, в която, за разлика от класическата ситуация, няма крайномерна сфера, върху която функционалът да е “малък” (класическите доказателства лежат върху теоремата на Browder за неподвижната точка).

В публикацията под номер 23 в списъка Лемата за планинския проход (Mountain pass theorem) и теореми от тип Люстерник-Шнирелман са обобщени за случая на непрекъснати функции, дефинирани в метрично пространство и приемащи стойности в частично наредено (чрез конус на положителните елементи) банахово пространство. Съществена разлика с предишни изследвания по този въпрос е фактът, че не се предполага, че конусът на положителните елементи има непразна вътрешност, което е важно за приложенията.

## **3 Съществуване на локално решение на диференциални включвания с неизпъкнала дясна част (15-18, 20, 22)**

Публикацията под номер 22 в списъка е отправна точка за един дълъг проект, целящ намиране на разумни условия за съществуване на локално решение на диференциално включване, чиято дясна част е полунепрекъснато отгоре многозначно изображение, но чиито образи е възможно да не са изпъкнали. Въведено е понятието “сблъскване върху множество” и са намерени класове многозначни изображения, които притежават/не притежават това свойство.

Доказана е теорема за съществуване на  $\varepsilon$ -решение на дадено диференциално включване, като основното предположение е в термините за съществуване на допирателни скорости към множествата, върху които полето “се сблъсква”. Статията съдържа голямо количество примери, мотивиращи разглежданията. Публикацията под номер 16 в списъка е пряко продължение на тези идеи. Там изследванията са концентрирани върху въпроса за съществуване на истинско решение (не  $\varepsilon$ -решение като в предишната статия) на диференциално включване с неизпъкнала дясна част. Въведено е понятието “инвариантна  $\varepsilon$ -апроксимация” на дадено многозначно изображение (върху елементите на дадено релативно отворено разбиване на дефиниционната му област) и е доказана теорема за съществуване на локално решение, подобряваща резултат от статията под номер 22. Също така, развита е общата идея за “частична инвариантна  $\varepsilon$ -апроксимация” на дадено многозначно изображение и като илюстрация на предложения подход е доказана следната теорема (развиваща резултати на Olech, Lojasiewicz, T. Haddad, A. Jourani и L. Thibault): Нека  $F$  и  $G$  са ограничени изображения, дефинирани върху множество  $D$ , което е сечение на отворено и затворено подмножества на  $R^n$ . Нека съществува редица от положителни числа  $\varepsilon_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , клоняща към нула и релативно отворени (в  $D$ ) множества  $D_k$  такива, че  $F$  е  $\varepsilon_k$ -полунепрекъснато отдолу върху  $D_k$ . Нека  $F$  е полунепрекъснато отгоре и изпъкналозначно върху множеството  $D \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$  и нека  $G$  е полунепрекъснато отгоре и изпъкналозначно върху  $D$ . Предполагаме също така и следното тангенциално условие: за всяко естествено  $k$ , за всяко  $x \in D_k$  и за всяко  $y \in F(x)$  съществува  $y' \in F(x) \cap \overline{B}(y, \varepsilon_k) \cap (T_D(x) - G(x))$ . Тогава диференциалното включване с дясна страна  $F + G$  притежава локално решение с начало произволна точка от  $D$ , не напускащо  $D$ .

Публикациите с номера 17 и 18 от списъка (17 е кратка версия на 18) са посветени на процеса на измитане на Моро, като нормалният конус се предполага да е конусът на граничните нормали. Тази задача е известна и обширно изследвана в различни ситуации, ако нормалният конус е конусът на Кларк (който е изпъкнал). За нас това изследване е възможност в по-конкретна ситуация да се разгледат част от ефектите, причинени от неизпъкналостта на дясната част на диференциално включване. Доказани са два резултата за съществуване на решение на процеса на измитане (единият при стационарно множество и непрекъснатата еднозначна пертурбация на дясната страна, а другият на класическата задача с движещо се множество без пертурбация) с конус на граничните нормали към множествата, при условие за дефинируемост на движещото се множество в някаква о-минимална структура. Дефинируемостта в някаква о-минимална структура е условие, радващо се на

нарастваща популярност в оптимизацията заради широката приложимост на резултатите и добрите свойства на обектите. Тези изследвания са развити в 15, където се изследват процеси на проектиране. Освен че е доказана обща теорема за съществуване на решение на процес на проектиране върху дефинируемо движещо се множество, изяснена е с примери връзката с процесите на измитане с конус на граничните нормали.

Публикацията под номер 20 в списъка се отнася към теорията на монотонните оператори. Главната ѝ цел е да отговори на един въпрос, поставен от Borwein и Wiersma. В класическа работа на Asplund (доразвита сравнително скоро от Borwein) се въвеждат ацикличните монотонни оператори като такива, които не могат да се разложат в сума на монотонен и нетривиален циклично монотонен оператор. Изследвайки радиално симетричните оператори с дефиниционна област, съдържаща се в равнината, ние успяваме да построим пример на (нелинеен) ацикличен максимален монотонен оператор, чиято дефиниционна област е ограничена.

През последната година кандидатът се връща към изследванията по тази тема заедно с Мартин Иванов (дипломант и после редовен докторант) и Михаил Кръстанов. Вече е подготвена за печат част от дипломната работа на Мартин Иванов, където е доказано ново достатъчно условие за съществуване на локално решение на диференциално включване, основаващо се на идеята за “разбягване на полето”, формализирана с помощта на понятието “квази-функция на Ляпунов”.

## **4 Необходими условия за оптималност в безкрайномерни пространства (1-14, 19)**

Теорията на оптималното управление е пресечна точка на оптимизацията, функционалния анализ и негладкия анализ и, от една страна, използва методи от тези важни области на съвременната математика, а от друга страна, е извор на нови задачи и нови идеи за анализите. В публикацията под номер 19 в списъка е доказан принципът на максимума на Понтрягин в безкрайномерно фазово пространство, като в сравнение със съществуващата литература са отслабени две от традиционните в областта предположения. Първо, няма никакви ограничения за банаховото пространство, в което се развива процесът - в литературата обикновено се изисква съществуване на строго изпъкнала спрегната норма. Второ, принципът за максимума е доказан без ключовото изискване за крайна коразмерност на алгебричната разлика на множеството

от фазовите вариации и целта. Тези изследвания са продължени в 14, където е направен опит за систематизация на различните типове вариации, разглеждани в литературата, и е подчертана важността на “равномерността” на апроксимацията на множество чрез дадено множество от вариации. При това се получава резултатът от 19 чрез съвършено различен метод. В статията 12 най-често използваните вариации в оптималното управление се разглеждат от гледна точка на негладкия анализ. Въвеждат се равномерни допирателни множества, изучават се някои техни свойства и се доказва теорема за неотделимост. Представени са и две приложения на теоремата за неотделимост. Първото от тези приложения е абстрактна теорема за множителите на Лагранж в банахово пространство. Второто приложение е необходимо условие за оптималност от тип принцип на максимума на Понтрягин за задача на оптималното управление в безкрайномерно фазово пространство, като вече не се предполага изпъкналост на множеството, което искаме да достигнем в крайния момент (т.е. целта). Като следствия се получават основните теореми от 19 и 14. В публикацията 10 са продължени изследванията на свойствата на равномерните допирателни множества и е изяснена връзката им с допирателния конус на Clarke в референтната точка.

Естествена следваща стъпка е да се приложи получената абстрактна теорема за множителите на Лагранж към задача на оптималното управление в крайномерно фазово пространство, разглеждана като оптимизационна задача в безкрайномерното пространство от съответните траектории. Съществуват много общи негладки необходими условия за оптималност за такива задачи. В 11 е разглеждана най-простата, но нетривиална задача от този вид, а именно така наречената основна задача на вариационното смятане. Задачата на вариационното смятане се състои в минимизиране на интегрален функционал  $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  при ограничения  $x(t) = x_a + \int_a^t u(s) ds$  за  $t \in [a, b]$  и  $x(b) = x_b$ , където  $(x, u) \in X \times Y$  е аргументът на  $\varphi$  ( $X$  и  $Y$  са подходящи функционални пространства; в 11 е избрано  $X = Y = L^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ). В публикацията 11 (при класическото условие за интегрална липицовост) епиграфиката на  $\varphi$  е апроксимирана с конкретно равномерно допирателно множество и е приложена абстрактната теорема за множителите на Лагранж от 12. Доказано е, че полученият множител на Лагранж е регулярен. Интересно е, че се наложи да бъдат използвани някои теореми от геометрията на банаховите пространства, които не се срещат в уводните курсове по предмета (например теоремата на Banach-Dieudonné, операция на Суслин и др.). Така е получен по същество стар резултат, но чрез съвършено различни методи. Не са използвани вариационни принципи и доказателствата се основават върху специфичните функционално-аналитични свойства на

разглежданата задача и върху предишни резултати на колектива. След тази работа усилията на авторския колектив бяха съсредоточени в прилагане на разработения подход към основната задача на вариационното смятане, но при съществено не-липшицово поведение на интегранда по отношение на първата променлива. В статията 6 бяха получени по-обща теорема за неотделимост и абстрактна теорема за множителите на Лагранж чрез въвеждане и изучаване на понятието “тангенциална трансверзалност”. По-силна, но по-лесна за проверка версия на тангенциалната трансверзалност – силна тангенциална трансверзалност, е въведена и изучавана в 5. При това е получено правилото за диференциране на сума за класическия субдиференциал на Clarke при значително по-слаби предположения от известните досега резултати. Чрез използване на тангенциалната трансверзалност в публикацията 8 отново е атакувана основната задача на вариационното смятане от абстрактна гледна точка, като най-доброто до момента условие на Aubin (използвано широко от Clarke) е поставено във вариационен контекст. Връзката на поточковите разглеждания в основната задача на вариационното смятане с абстрактната функционално-аналитична постановка е коментирана в доста обща ситуация в 7. В процеса на тези изследвания беше осъзнат фактът, че понятието за субтрансверзалност е основно за прилаганите методи. В статията 3 са характеризирани понятията за трансверзалност и субтрансверзалност в дух, близък до тангенциалната трансверзалност. Получените характеристики са инфинитезимални по характер и много по-удобни за използване от съответните дефиниции. Изследването на силната тангенциална трансверзалност е продължено в 2. Изяснена е връзката на това понятие с трансверзалността. Като следствие (малко неочаквано) се получава, че ако разликата на две ограничени изпъкнали множества в банахово пространство е гъста в околност на нулата, то тя покрива околност на нулата. В момента кандидатът в сътрудничество с докторант Мария Ташева продължава тези изследвания, като вече е подготвена за печат статия върху трансверзалност и силна тангенциална трансверзалност на краен брой множества.

В статията 4 е получен множител на Лагранж за основната задача на вариационното смятане при вариационно условие, допускащо съществено не-липшицово поведение на интегранда. Развита е идеята на Borwein и Strojwas за “смущение” и последващо “компенсиране”, като класът на “компенсиращите” множества е съществено разширен. Като следствие се получава един класически резултат на Clarke за задачата на вариационното смятане. Осъзнаването, че задачата на оптималното управление може да бъде разглеждана като задача на вариационното смятане при наличие на смесени фазови ограничения, предлага нови перспективи за приложения на основния резултат от

4. Една стъпка в тази посока е получаването в 1 на обобщение за диференциални включвания с липшицова дясна страна на линеаризацията на динамиката, която е в основата на класическия подход на Дубовицкий и Милютин. Нещо повече, получено е необходимо условие за оптималност при наличие на чисти фазови ограничения, за които подходът на Clarke не дава резултат. При това е получено обобщение на класическото уравнение на Ойлер-Лагранж за негладка задача на вариационното смятане, както и на класическата лема на ДюБоа-Раймонд в негладка постановка. От тях директно следва необходимо условие за оптималност, което е ново даже в гладкия случай (тези условия са вече предложени за печат). Резултатите, получени до момента, дават основание да твърдим, че предложеният нов подход за получаване на необходими условия за оптималност за безкрайномерни оптимизационни задачи е с голям потенциал за бъдещо развитие.